



**INSTITUTO UNIVERSITARIO  
DE LA EMPRESA**

**ANÁLISIS ECONÓMICO DE POLÍTICAS DE  
PRODUCCIÓN TÁCTICAS Y GESTIÓN DE  
INVENTARIOS BAJO INCERTIDUMBRE**

ANTONIO ALONSO-AYUSO  
LAUREANO F. ESCUDERO BUENO  
M. TERESA ORTUÑO SÁNCHEZ  
CARMEN E. RAMOS DOMÍNGUEZ

SERIE ESTUDIOS 2004/46

SANTA CRUZ DE TENERIFE, JUNIO 2004



**UNIVERSIDAD DE  
LA LAGUNA**

En este trabajo se propone una política de planificación táctica de la producción bajo incertidumbre a lo largo de un horizonte temporal dado, mediante Programación Estocástica bajo escenarios. Su tratamiento se efectúa mediante la optimización de un Modelo Determinista Equivalente (MDE) Mixto 0-1 en un entorno multietápico de escenarios. Previamente se introducen dos modelos deterministas del problema de planificación de la producción, y se efectúa un análisis computacional comparativo entre ambos. A partir de uno de estos modelos se propone la representación compacta del MDE mixto 0-1, con recursión completa y recursión simple. Se presenta la experiencia computacional del modelo bajo recursión completa, y una serie de medidas con el propósito de valorar la eficiencia de la solución estocástica con respecto a la solución tradicional basada en el escenario promedio.

A tactical production planning along a given time horizon under uncertainty is presented as a Mixed 0-1 Deterministic Equivalent Model (MDE) in a multistage scenario environment. Previously we present two deterministic models of the production planning problem. A comparative computational study is reported. A version of the compact representation of the MDE model have being implemented for a full recourse approach and computational results are reported. The report assess the efficiency of the stochastic solution with respect to the more traditional scenario average based solution.

## **ANÁLISIS ECONÓMICO DE POLÍTICAS DE PRODUCCIÓN TÁCTICAS Y GESTIÓN DE INVENTARIOS BAJO INCERTIDUMBRE**

ANTONIO ALONSO-AYUSO  
LAUREANO F. ESCUDERO BUENO  
M. TERESA ORTUÑO SÁNCHEZ  
CARMEN E. RAMOS DOMÍNGUEZ

SERIE ESTUDIOS 2004/46

SANTA CRUZ DE TENERIFE, JUNIO 2004

Antonio Alonso-Ayuso. Departamento de CC. Experimentales y Tecnología. Universidad Rey Juan Carlos. Móstoles, Madrid. España.

Teléfono: 914887009

Fax: 916647490

Correo electrónico: [a.alonso@escet.urjc.es](mailto:a.alonso@escet.urjc.es)

Laureano F. Escudero Bueno. Centro de Investigación Operativa. Universidad Miguel Hernández. Avenida Ferrocarril s/n, 03202 Elche, Alicante. España.

Teléfono: 966658584

Fax: 966658715

Correo electrónico: [escudero@umh.es](mailto:escudero@umh.es)

M. Teresa Ortuño Sánchez. Departamento de Investigación Operativa I. Universidad Complutense de Madrid. Ciudad Universitaria 28040, Madrid. España.

Teléfono: 913944656

Fax: 913944406

Correo electrónico: [mteresa@eucmax.sim.ucm.es](mailto:mteresa@eucmax.sim.ucm.es)

Carmen E. Ramos Domínguez. Departamento de Estadística, I. O. y Computación. Universidad de La Laguna. Avenida Astrofísico Francisco Sánchez s/n, 38271 La Laguna, Tenerife. Islas Canarias. España

Teléfono: 922318189

Fax: 922318170

Correo electrónico: [ceramos@ull.es](mailto:ceramos@ull.es)

## **ÍNDICE**

### **1.- INTRODUCCIÓN**

### **2.- REPRESENTACIÓN DETERMINISTA**

2.1.- Modelo Determinista Agregado

2.2.- Modelo Determinista Desagregado

### **3.- MODELIZACIÓN DE LA INCERTIDUMBRE MEDIANTE REPRESENTACIÓN COMPACTA**

3.1.- Política de Recursión Completa

3.2.- Política de Recursión Simple

### **4.- RESULTADOS COMPUTACIONALES**

### **5.- CONCLUSIONES**

### **6.- AGRADECIMIENTOS**

### **BIBLIOGRAFÍA**

## 1.- INTRODUCCIÓN

La planificación de la producción es una de las actividades más importantes dentro del sector de la producción empresarial, entre otros. El entorno donde se enmarcan las decisiones a tomar se caracteriza por un ambiente de incertidumbre debido a ciertos parámetros del problema. Tal vez, el más importante de estos parámetros es la demanda de mercado de dichos productos. Aunque también existen otros, como la disponibilidad de recursos en cada período de tiempo del horizonte temporal considerado, o el coste de producción, que pueden variar de un período a otro. De hecho, los sistemas de producción tradicionales están gestionados por la demanda de los productos pero, también, en cierta manera por los requerimientos de materiales. Para cubrir de forma eficiente la demanda de los clientes, es necesario contar con un plan de producción que determine la cantidad a producir, y las necesidades de materia prima y recursos tanto humanos como técnicos, de una forma integrada a lo largo de un horizonte temporal predefinido.

Generalmente, los problemas con los que se enfrenta la empresa con respecto a la capacidad de producción en cierto horizonte temporal de planificación se pueden resolver mediante stocks, reservas adicionales, u otras fuentes alternativas. A menudo, la cantidad que se necesita producir no se puede adquirir en el período deseado, pero frecuentemente es posible realizar acuerdos con otros productores o proveedores para conseguir la materia prima o el mismo producto a vender, y así satisfacer las necesidades del mercado. Esto obliga a la empresa a que no trabaje de forma aislada, sino que actúe en un entorno colaborativo tanto con sus clientes como con sus proveedores.

Las políticas de producción que se presentan en este trabajo, se formulan mediante modelos dinámicos, esto es, se analizan a lo largo de un determinado horizonte temporal de planificación compuesto por varios períodos de tiempo (por ejemplo, semanas o meses). Se trata de políticas tácticas cuya finalidad es la mejor utilización de los recursos, en contraposición con las políticas estratégicas que permiten dimensionar a medio y largo plazo los recursos productivos. Ver Bitran y Tirupati (1993) para analizar las diferencias entre ambas políticas.

Los modelos de planificación de producción tradicionales tratan de minimizar los costes de producción y mantenimiento del inventario durante un determinado horizonte temporal, atendiendo a determinados valores fijos de la demanda y considerando que la capacidad de producción es conocida. Ver ejemplos de estos modelos deterministas en Wagner y Within (1958), Dzielinski y Gomory (1965), Florian y Klein (1971) y Lasdon y Terjung (1971) entre otros. En otro contexto también determinista ver Krarup y Bilde (1977) cuyo modelo determinista agregado será fuertemente analizado en este trabajo, y Shapiro (1993, 2001). El tratamiento de la estocasticidad es relativamente reciente en planificación de producción. Poco a poco se ha ido incrementando el interés por resolver el problema de planificación de producción con capacidad de producción y demanda estocástica, e incluso el propio coste de

producción variable. De hecho, se plantea que la incertidumbre se deba, por un lado al dinamismo estocástico de la disponibilidad y rendimiento de los recursos, y por otro, a la demanda aleatoria.

Bitran y Yanesse (1984) desarrollan aproximaciones deterministas de un modelo de planificación no secuencial con capacidades y analizan su efectividad cuando la demanda se caracteriza por una distribución de probabilidad estándar. Kekre y Kekre (1985) combinan un modelo de planificación con capacidades, donde se modeliza explícitamente el trabajo en proceso y el tiempo transcurrido, con un modelo de programación matemática en tiempo discreto con determinadas variaciones de la demanda. Zipkin (1986) desarrolló un modelo de equilibrio entre la incertidumbre debida a la demanda y la incertidumbre de los sistemas de producción, mediante un mecanismo de control de inventarios. En Graves (1986) y Graves y Fine (1988) se puede observar un modelo de planificación a largo plazo, que permite evaluar la capacidad de carga bajo las condiciones de variación de la demanda. Karmakar (1987, 1989) subraya la relación entre la capacidad de carga, el tiempo transcurrido de producción y el trabajo en progreso. Eppen et al. (1989) proponen una aproximación mediante escenarios cuyo interés se centra en el mayor rango de decisiones a tomar, dependiendo de la facilidad para seleccionar tales decisiones relativas a la producción. Sethi y Zhang (1995) realizan un análisis asintótico de los sistemas de producción jerárquicos con demanda y capacidad de producción estocástica, modelizándolo mediante un proceso de Markov finito. Baricelli et al. (1996) tratan el problema de planificación estratégica multiperíodo, pero para una cadena de suministro de productos de consumo. Albritton et al. (2000) resuelven el problema de planificación de la producción con demanda aleatoria mediante técnicas de optimización basadas en variantes del método de muestreo de Monte Carlo.

Como vemos existe una amplia literatura sobre el tema y, además, en cada uno de los trabajos también varía el criterio a optimizar (tal como minimizar el coste de producción, el tiempo de proceso, y el retraso en las entregas, maximizar el equilibrio de la carga de recursos, etc.), la forma de tratar la incertidumbre, y otros aspectos del problema en sí. El entorno globalizado en el cual se mueve la economía a nivel mundial ofrece una gran número de oportunidades o estrategias, pero también es fuerte el riesgo que conlleva. En este trabajo se propone modelizar la incertidumbre y el dinamismo que rodea la demanda de los productos, su coste de producción, y la disponibilidad de los recursos mediante la disciplina de Análisis de Escenarios con recursión completa; ello permitirá alcanzar un plan de producción eficiente. Además, se analiza a través de una serie de medidas la diferencia entre el plan estocástico de producción y el plan de producción obtenido por estrategias agresivas consistentes en utilizar el modelo determinista clásico con los parámetros promedio, o incluso, el modelo estocástico donde se anticipan las decisiones de producción desde el inicio hasta final del proceso de decisión.

Por otro lado, es preciso señalar que muchas de las aproximaciones estocásticas desarrolladas en otros trabajos, sólo consideran en sus modelizaciones variables continuas como en Escudero et al. (1993, 1999). En este trabajo se presenta un esquema más ajustado a la realidad en el que la inclusión de ciertas condiciones logísticas exige la utilización

adicional de variables 0-1. Estas condiciones consisten en la limitación de los productos a producir en un determinado período, así como los costos fijos de producción y la producción mínima condicional. Ver también Ahmed et al. (2000), donde se analiza un modelo mixto 0-1 de inversión multiperíodo para la expansión de la capacidad de producción, y Lucas et al. (2000, 2001), que analizan el problema de planificación de una cadena de suministros, tratando la incertidumbre mediante escenarios.

El problema de planificación de la producción que se recoge en este trabajo consiste en determinar el plan maestro de producción (cantidad a producir de cada producto en cada período del horizonte temporal para satisfacer la demanda del mismo período y siguientes), de tal manera que la demanda no satisfecha se pierda. Se contempla un ambiente de incertidumbre en la demanda, el coste de producción y la disponibilidad de recursos. Se representa la incertidumbre mediante un árbol polietápico de escenarios. Se considera la situación de recursión completa en la que las decisiones de producción se toman en cada período contemplando globalmente todos los escenarios pero sin subordinarse a ninguno de ellos, lo cual significa que se contempla el caso en el que las decisiones de producción se toman en cada grupo de escenarios que se espera ocurran en cada período.

El resto del trabajo tiene la siguiente organización. La sección 2 introduce formalmente el problema y plantea dos modelos mixtos 0-1 equivalentes para la versión determinista del problema. La sección 3 plantea el modelo mixto 0-1 correspondiente a la versión estocástica del problema en sus variantes de recursión completa y recursión simple, favoreciendo la recursión completa dado el gran inconveniente que tiene la recursión simple (esto es, incremento de stock y/o incremento de la demanda no satisfecha). La sección 4 presenta la experiencia computacional obtenida en una gran variedad de casos, mostrando la ventaja que supone contemplar la incertidumbre en el propio modelo (como hace la modelización con recursión), en lugar de utilizar un modelo determinista en el que la estocasticidad de los parámetros inciertos es meramente representada por su valor promedio. En la última sección se presentan las conclusiones acerca del trabajo y líneas futuras de investigación

## **2.- REPRESENTACIÓN DETERMINISTA**

### **2.1.- MODELO DETERMINISTA AGREGADO**

Antes de considerar el problema de planificación con la demanda y/o capacidad de la producción futuras desconocidas, se plantea el problema determinista. El objetivo consiste en determinar un plan de producción y utilización de la capacidad de almacenamiento equilibrados, a lo largo de un horizonte temporal, de forma que se minimice el coste global, formado por el coste de producción, de mantenimiento del inventario y de pérdida de la demanda. Sea la siguiente notación para el problema determinista.

**Conjuntos:**

**J**, Conjunto de productos a producir.

**R**, Conjunto de recursos (maquinaria, recursos humanos, electricidad, otros recursos.).

**T**, Conjunto de períodos de tiempo en el horizonte temporal considerado.

**Parámetros:**

**$f_j$** , Costo fijo en que se incurre por producir el producto  $j$ , independientemente de la cantidad que se produzca, para  $j \in J$ .

**$c_{jt}$** , Costo por producir una unidad del producto  $j$  en el período de tiempo  $t$ , para  $j \in J, t \in T$ .

**$h_j$** , Costo unitario de stock del producto  $j$  en cualquier período de tiempo, para  $j \in J$ .

**$\bar{N}$** , Número máximo de productos a producir en cualquier período de tiempo.

**$\underline{X}_{jt}$**  y  **$\bar{X}_j$** , Producción mínima condicional del producto  $j$  en el período de tiempo  $t$ , y producción máxima del producto  $j$  en cualquier período de tiempo, para  $j \in J, t \in T$ .

**$S_j$** , Volumen máximo del producto  $j$  que puede haber en stock en un período de tiempo cualquiera, para  $j \in J$ .

**$o_{rj}$** , Coeficiente de absorción, es decir, volumen del recurso  $r$  necesario para producir una unidad del producto  $j$ , para  $r \in R, j \in J$ .

**$O_{rt}$** , Disponibilidad máxima del recurso  $r$  en el período de tiempo  $t$ , para  $r \in R, t \in T$ .

**$D_{jt}$** , Demanda del producto  $j$  en el período de tiempo  $t$ , para  $j \in J, t \in T$ .

**$p_j$** , Penalización por unidad de demanda no satisfecha del producto  $j$  en cualquier período de tiempo, para  $j \in J$ .

Para el caso determinista (donde se suponen conocidos todos los parámetros), se proponen dos modelos equivalentes del problema de planificación de la producción que, aunque describen el mismo problema difieren desde el punto de vista computacional.

**Variables para el Modelo (2.1)-(2.8):**

**$x_{jt}$** , Volumen del producto  $j$  producido en el período de tiempo  $t$ , para  $j \in J, t \in T$ .

**$s_{jt}$** , Volumen del producto  $j$  almacenado en stock en el período de tiempo  $t$ , para  $j \in J, t \in T$ .

Nota:  $s_{j0} = 0, \forall j \in J$ .

**$z_{jt}$** , Demanda no satisfecha del producto  $j$  en el período de tiempo  $t$ , para  $j \in J, t \in T$ .

**$\delta_{jt}$** , Variable 0-1, tal que vale 1 si el producto  $j$  se produce en el período de tiempo  $t$  y 0, en otro caso, para  $j \in J, t \in T$ .

En consecuencia, la representación matemática del modelo es como sigue:

$$\min \sum_{t \in T} \sum_{j \in J} [c_{jt} x_{jt} + h_j s_{jt} + p_j z_{jt} + f_j \delta_{jt}] \quad (2.1)$$

$$\text{s.a : } s_{jt-1} + x_{jt} + z_{jt} = D_{jt} + s_{jt} \quad \forall j \in J, t \in T \quad (2.2)$$

$$\sum_{j \in J} o_{rj} x_{jt} \leq O_{rt} \quad \forall r \in R, t \in T \quad (2.3)$$

$$\underline{X}_j \delta_{jt} \leq x_{jt} \leq \bar{X}_j \delta_{jt} \quad \forall j \in J, t \in T \quad (2.4)$$

$$\sum_{j \in J} \delta_{jt} \leq \bar{N} \quad \forall t \in T \quad (2.5)$$

$$0 \leq s_{jt} \leq S_j \quad \forall j \in J, t \in T \quad (2.6)$$

$$0 \leq z_{jt} \leq D_{jt} \quad \forall j \in J, t \in T \quad (2.7)$$

$$\delta_{jt} \in \{0, 1\} \quad \forall j \in J, t \in T \quad (2.8)$$

La función objetivo (2.1) consiste en minimizar el coste total de producción, de mantenimiento del stock ó inventario, penalización de la demanda no satisfecha y costo fijo de producción. Las restricciones (2.2) recogen el equilibrio de la producción, que indican que lo producido en un período determinado, la demanda no satisfecha en dicho período y lo que se almacenó en el período anterior debe servir para satisfacer la demanda de ese período más el volumen a almacenar. Las condiciones (2.3) exigen que no se superen las disponibilidades de recursos necesarias para producir las cantidades de producto propuestas en el modelo. Las restricciones (2.4) exigen que si se produce un producto, al menos sea una cantidad mínima que compense la puesta en marcha de las máquinas necesarias para la producción, y por supuesto, sin sobrepasar el tope permitido. Las condiciones (2.5) fuerzan en cada período que el número de productos a producir no sea superior al máximo permitido. Las restricciones (2.6) y (2.7) imponen una limitación máxima en el stock de los productos y la condición lógica que impide que la demanda no satisfecha sea superior a la propia demanda. Por último, la condición (2.8) impone la restricción de integralidad en algunas variables.

## 2.2.- MODELO DETERMINISTA DESAGREGADO

El modelo (2.1)-(2.8) es un modelo dinámico clásico, no obstante y con vistas a un tratamiento adecuado de la incertidumbre que rodea al problema de planificación de la producción, se intenta estructurar las decisiones atendiendo a una política que contemple el futuro en las mismas. De esta forma se presenta un segundo modelo también determinista, donde no sólo se considera cuándo se debe producir sino también el período a cuya demanda va dirigida dicha producción. En este otro modelo se produce un aumento del número de variables de producción, lo que genera un modelo algo más complejo. Sin embargo, los resultados computacionales que se obtienen, muestran que los tiempos de CPU necesarios para resolver ambos modelos no garantizan que ninguno de los modelos sea notablemente mejor que el otro.

En este nuevo modelo, los parámetros son los mismos que en el modelo (2.1)-(2.8), las variables  $\delta_{jt}$  y  $z_{jt}$  son también las mismas, las variables  $s_{jt}$  desaparecen y la variables  $x_{jt}$  se reemplazan por:

$x_{jt}^\tau$ , Volumen del producto  $j$  que se produce en el período de tiempo  $t$  para satisfacer la demanda del período  $\tau$ , para  $j \in J$ ,  $t, \tau \in T$ :  $t \leq \tau$ .

Sea entonces el siguiente modelo determinista desagregado:

$$\min \sum_{t \in T} \sum_{j \in J} \left[ c_{jt} \sum_{\substack{\tau \in T \\ \tau \geq t}} x_{jt}^\tau + h_j \sum_{\substack{k \in T \\ k \leq t}} \sum_{\substack{\tau \in T \\ \tau > t}} x_{jk}^\tau + p_j z_{jt} + f_j \delta_{jt} \right] \quad (2.9)$$

$$\text{s.a. : } \sum_{j \in J} o_{rj} \left( \sum_{\substack{\tau \in T \\ \tau \geq t}} x_{jt}^\tau \right) \leq O_{rt} \quad \forall r \in R, t \in T \quad (2.10)$$

$$\underline{X}_{jt} \delta_{jt} \leq \sum_{\substack{\tau \in T \\ \tau \geq t}} x_{jt}^\tau \leq \bar{X}_j \delta_{jt} \quad \forall j \in J, t \in T \quad (2.11)$$

$$\sum_{j \in J} \delta_{jt} \leq \bar{N} \quad \forall t \in T \quad (2.12)$$

$$\sum_{\substack{k \in T \\ k \leq t}} x_{jk}^\tau + z_{jt} = D_{jt} \quad \forall j \in J, t \in T \quad (2.13)$$

$$0 \leq \sum_{\substack{k \in T \\ k \leq t}} \sum_{\substack{\tau \in T \\ \tau > t}} x_{jk}^\tau \leq S_j \quad \forall j \in J, t \in T \quad (2.14)$$

$$x_{jt}^\tau \geq 0 \quad \forall j \in J, t, \tau \in T : t \leq \tau \quad (2.15)$$

$$\delta_{jt} \in \{0, 1\} \quad \forall j \in J, t \in T \quad (2.16)$$

$$z_{jt} \geq 0 \quad \forall j \in J, t \in T \quad (2.17)$$

Se puede observar la equivalencia de los modelos (2.1)-(2.8) y (2.9)-(2.17), teniendo en cuenta que  $x_{jt}$  y  $s_{jt}$  se pueden representar por

$$x_{jt} = \sum_{\tau \in T: t \leq \tau} x_{jt}^\tau$$

$$s_{jt} = \sum_{k \in T: k \leq t} \sum_{\tau \in T: t < \tau} x_{jk}^\tau$$

No obstante, el modelo (2.9)-(2.17) trabaja con variables que no sólo representan la producción de los productos en un determinado período de tiempo, sino que van a satisfacer la demanda de otro período concreto. En base a estas variables se puede expresar el volumen

almacenado en stock de un período para el siguiente, y como consecuencia, se prescinde de las variables de stock.

La solución óptima de ambos modelos deterministas es la política de producción e inventario más idónea para los datos considerados, cuando éstos se conocen de forma exacta. En otro caso, una estrategia muy usual aunque un tanto radical es considerar el valor promedio de los datos inciertos. La sección 4 recoge un análisis comparativo de dicha alternativa con la propuesta por el modelo estocástico y se llega a la conclusión de que la solución propuesta por el modelo estocástico es la más adecuada.

Tanto en el modelo (2.1)-(2.8) como en el modelo (2.9)-(2.17) se puede observar la influencia en la política de producción e inventario correspondiente a una variación en el número máximo de productos que se permiten producir en un período de tiempo dado. Además, también se suelen usar para analizar la influencia en la demanda a servir, debida a un cambio en la penalización de la demanda no satisfecha.

### **3.- MODELIZACIÓN DE LA INCERTIDUMBRE MEDIANTE REPRESENTACIÓN COMPACTA**

Como en todo proceso de decisión, elegir las decisiones correctas sobre un plan de producción requiere información apropiada acerca de la demanda de mercado, costes de producción y disponibilidad de los recursos. Sin embargo, la evolución de estos parámetros a lo largo del horizonte de planificación no siempre se conoce. En esta sección se modeliza la incertidumbre asociada a los mismos empleando la técnica de **Análisis de Escenarios**, donde se considera que no se está bajo un entorno de total desconocimiento, sino que se dispone de cierta información sobre los parámetros estocásticos. Tal información permite determinar un número finito de clases representadas cada una de ellas por un valor distinto de tales parámetros. Estas clases generan por tanto, diferentes entornos del problema que se denominan **Escenarios**. Por supuesto, el conjunto de escenarios seleccionados ha de ser tal que refleje las condiciones más heterogéneas que se puedan presentar, para conseguir así modelizaciones eficientes. Las metodologías a las que se suele recurrir para generar tales escenarios son: Redes Neuronales, Simulación Monte Carlo, Análisis de Conglomerados, etc. A partir de los escenarios creados, nuestro interés se centra en construir una política de decisión conjunta que tenga en cuenta todos los escenarios, tratando de reducir con ello la toma de decisiones erróneas ocurra el escenario que ocurra, y cuyo objetivo sea minimizar el coste global esperado. Esto es, se pretende alcanzar una política de decisión robusta, más que óptima.

### 3.1.- POLÍTICA DE RECURSIÓN COMPLETA

En un problema donde el tiempo y la incertidumbre juegan un papel importante, el modelo de decisión se debe diseñar de forma que el usuario adopte una política de decisión con la que pueda responder a aquellos sucesos que se presenten con el paso del tiempo. Si la demanda de los productos, la disponibilidad de los recursos, y los costes de producción son parámetros aleatorios, es lógico estructurar por etapas la información disponible sobre dichos parámetros y, en general, hacer lo mismo con el resto de datos del problema. Esto conlleva establecer qué tipo de decisiones tomar en cada una de las etapas. Para ello se utiliza un árbol de escenarios como se muestra en la Figura 3.1, cuyos nodos representan los períodos de tiempo donde es preciso tomar una decisión. Una vez que se ha tomado la decisión, pueden presentarse diferentes situaciones y existe cierta información disponible acerca de estas posibles situaciones al inicio de la siguiente etapa. Cada camino desde el nodo raíz hasta las hojas del árbol representa un escenario específico, y se corresponde con una realización de los parámetros inciertos del problema. En el árbol de la Figura 3.1 se muestran 10 escenarios con cuatro etapas de decisión. Además, las distintas posibilidades en cada etapa son diferentes. Nota: En el ejemplo de la Figura 3.1 los períodos de tiempo coinciden con las etapas de decisión, y así se supondrá en este trabajo. No obstante, a veces es razonable considerar que cada etapa comprenda uno o más períodos de tiempo, sobre todo cuando el número de períodos es demasiado elevado.

Volviendo a la idea de partida, en esta sección se presenta un modelo de programación estocástica multietápico que propone al inicio únicamente las decisiones que no se pueden posponer en el tiempo. De esta forma las decisiones propuestas para la primera etapa serán únicas, mientras que en el resto de las etapas se proporcionan las decisiones para cada grupo de escenarios. Estas decisiones serán más precisas cuanto más cerca se esté de la etapa a la que se refiere. De esta forma, la solución se va adaptando en función de los escenarios que vayan apareciendo. A este tipo de política, en la que se recoge el denominado principio de no anticipatividad introducido por Rockafellar y Wets en 1991, es a la que se denomina de **Recursión Completa**. Con vistas a presentar el modelo estocástico multietápico que propone tal política, se considera la siguiente notación.

#### Conjuntos:

**J, R, T**, se definen de igual forma que en los modelos deterministas.

**$\Omega$** , Conjunto de escenarios.

**$\Omega_g$** , Conjunto de escenarios que pertenecen al grupo  $g$ , para  $g \in G$ . Así por ejemplo, en la Figura 3.1,  $\Omega_2 = \{11,12,13,14\}$ , y también se tiene que  $\Omega_{11} = \{11\}$ , ...,  $\Omega_{20} = \{20\}$ .

**G**, Conjunto de grupos de escenarios. En la Figura 3.1 se dispone de  $|G| = 20$  grupos de escenarios.

**$G_t$** , Conjunto de grupos de escenarios en el período  $t$ . Nota:  $G_{|T|} = \Omega$ . Como ejemplo indicar que  $G_3 = \{5,6,\dots,10\}$  en la Figura 3.1.

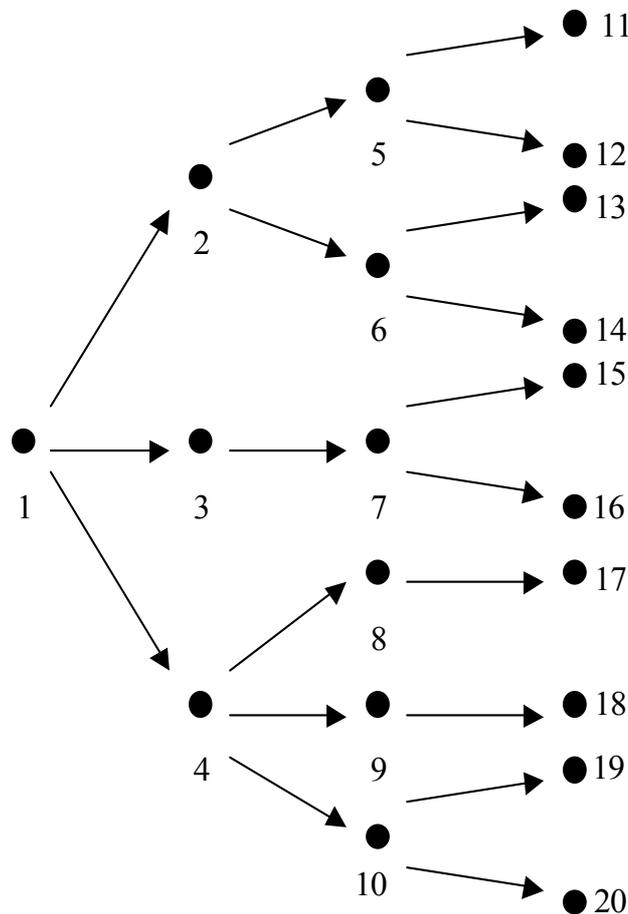
$N^g$ , Conjunto de grupos de escenarios tal que  $\Omega_g \subseteq \Omega_k$  para  $k \in N^g$ ,  $g \in G$ . Si se observa el árbol de escenarios de la Figura 3.1,  $N^g$  se corresponde con el conjunto de nodos predecesores al nodo  $g$  hasta alcanzar el nodo raíz del árbol, incluido el mismo. En la Figura 3.1,  $N^6 = \{1,2,6\}$  y  $N^{16} = \{1, 3, 7, 16\}$ , entre otros.

**Parámetros Deterministas:**

Además de los parámetros deterministas correspondientes a los dos modelos anteriores,  $f_j$ ,  $h_j$ ,  $\bar{N}$ ,  $\underline{X}_{jt}$ ,  $\bar{X}_j$ ,  $S_j$ ,  $o_{rj}$ , y  $p_j$ , cuyo significado es el mismo, se denota por:

$t(g)$ , Período de tiempo al que pertenece el grupo de escenarios  $g$ , tal que  $g \in G_{t(g)}$ . Esto es, en la Figura 3.1  $t(7) = 3$ .

$w^g$ , Peso del grupo de escenarios  $g$  en el período  $t(g)$ , tal que  $\sum_{g \in G_t} w^g = 1, \forall t \in T$ .



**Figura 3.1: Árbol de Escenarios**

**Parámetros Estocásticos:**

$O_r^g$ , Disponibilidad del recurso  $r$  bajo el grupo de escenarios  $g$ , para  $g \in G, r \in R$ .

$D_j^g$ , Demanda del producto  $j$  bajo el grupo de escenarios  $g$ , para  $j \in J, g \in G$ .

$c_j^g$ , Coste de producir una unidad de producto  $j$  bajo el grupo de escenarios  $g$ , para  $j \in J, g \in G$ .

**Variables del modelo de Recursión Completa:**

$x_j^{g\tau}$ , Producción del producto  $j$  en el período de tiempo  $t(g)$  bajo el grupo de escenarios  $g$ , para satisfacer la demanda del período  $\tau$ , para todo  $j \in J, \tau \in T: t(g) \leq \tau, g \in G$ .

$z_j^g$ , Demanda no satisfecha del producto  $j$  en el período de tiempo  $t(g)$  bajo el grupo de escenarios  $g$ , para  $j \in J, g \in G$ .

$\delta_j^g$ , Variable 0-1, que vale 1 si se produce el producto  $j$  en el período  $t(g)$  bajo el grupo de escenarios  $g$ , y 0, en otro caso, para  $j \in J, g \in G$ .

El Modelo Determinista Equivalente MDE tiene entonces la siguiente expresión.

$$\min \sum_{g \in G} w^g \left[ \sum_{j \in J} \left( c_j^g \sum_{\tau \in T: t(g) \leq \tau} x_j^{g\tau} + h_j \sum_{l \in N^g} \sum_{\tau \in T: t(g) < \tau} x_j^{l\tau} + p_j z_j^g + f_j \delta_j^g \right) \right] \quad (3.1)$$

$$\text{s.a:} \quad \sum_{j \in J} o_{rj} \left( \sum_{\tau \in T: t(g) \leq \tau} x_j^{g\tau} \right) \leq O_r^g \quad \forall r \in R, g \in G \quad (3.2)$$

$$\underline{X}_{jt(g)} \delta_j^g \leq \sum_{\tau \in T: t(g) \leq \tau} x_j^{g\tau} \leq \bar{X}_j \delta_j^g \quad \forall j \in J, g \in G \quad (3.3)$$

$$\sum_{j \in J} \delta_j^g \leq \bar{N} \quad \forall g \in G \quad (3.4)$$

$$\sum_{l \in N^g} x_j^{lt(g)} + z_j^g = D_j^g \quad \forall j \in J, g \in G \quad (3.5)$$

$$0 \leq \sum_{l \in N^g} \sum_{\tau \in T: t(g) < \tau} x_j^{l\tau} \leq S_j \quad \forall j \in J, g \in G \quad (3.6)$$

$$x_j^{g\tau} \geq 0 \quad \forall j \in J, g \in G, \tau \in T: t(g) \leq \tau \quad (3.7)$$

$$\delta_j^g \in \{0, 1\} \quad \forall j \in J, g \in G \quad (3.8)$$

$$z_j^g \geq 0 \quad \forall j \in J, g \in G \quad (3.9)$$

Se puede observar que el modelo (3.1)-(3.9) para la versión estocástica tiene un planteamiento en la misma línea que el modelo (2.9)-(2.17) para la versión determinista, pero considerando que el eje central no es el período de tiempo  $t$ , sino el grupo de escenarios  $g$ , para  $g \in G_{t(g)}$ . La política propuesta por el modelo (3.1)-(3.9) es más eficiente que ninguna

otra política basada en valores esperados, ya que permite que sus decisiones se ajusten según las realizaciones que se puedan presentar en cada período de tiempo. Ahora bien, en el modelo no se recoge el esfuerzo adicional que supone estar en todo instante de tiempo dirigiendo el plan de producción, y el usuario se puede plantear si existe mucha variación en el resultado del modelo cuando todas las decisiones se fijan a priori para cada período de tiempo, no sólo para el período inicial. De esta forma, surge un modelo estocástico alternativo denominado Modelo Estocástico Multietápico con Recursión Simple que se presenta en la siguiente sección, donde se anticipan todas las decisiones al inicio del horizonte considerado.

### 3.2.- POLÍTICA DE RECURSIÓN SIMPLE

El modelo estocástico multietápico con **Recursión Simple** es más sencillo que el modelo con Recursión Completa desde el punto de vista computacional ya que, como se ha indicado más arriba, se supone que se toman todas las decisiones al inicio del horizonte de planificación. Ello significa que hay una decisión para cada período de tiempo, en lugar de una decisión para cada posible realización de los parámetros inciertos en cada período de tiempo. Por tanto, el tiempo necesario para su resolución será considerablemente inferior, pero también produce un valor objetivo óptimo peor que el que se consigue con el modelo con recursión completa. No obstante, existen situaciones en que merece la pena utilizarlo, sobre todo cuando el esfuerzo de dirección que supone estar en todo momento controlando la producción es medianamente elevado. Para presentarlo se usa una combinación de las variables ya definidas en los modelos deterministas y estocástico anteriores.

#### Variables del modelo de Recursión Simple:

$x_j^{t\tau}$ , Volumen del producto  $j$  que se produce en el período  $t$  para satisfacer la demanda del período  $\tau$ , para  $j \in J$ ,  $t, \tau \in T$ :  $t \leq \tau$ .

$\delta_{jt}$ , Variable 0-1, tal que vale 1 si el producto  $j$  se produce en el período de tiempo  $t$  y 0, en otro caso.

$z_j^g$ , Demanda no satisfecha del producto  $j$  en el período de tiempo  $t(g)$  bajo el grupo de escenarios  $g$ , para todo  $j \in J$ ,  $g \in G$ .

El Modelo Estocástico con Recursión Simple se representa entonces como sigue:

$$\min \sum_{g \in G} w^g \left[ \sum_{j \in J} \left( c_j^g \sum_{\substack{\tau \in T \\ \tau \geq t(g)}} x_{jt(g)}^\tau + h_j \sum_{\substack{k \in T \\ k \leq t(g)}} \sum_{\substack{\tau \in T \\ \tau > t(g)}} x_{jk}^\tau + p_j z_j^g + f_j \delta_{jt(g)} \right) \right] \quad (3.10)$$

$$\text{s.a : } \sum_{j \in J} o_{rj} \left( \sum_{\substack{\tau \in T \\ \tau \geq t(g)}} x_{jt(g)}^\tau \right) \leq O_r^g \quad \forall r \in R, g \in G \quad (3.11)$$

$$\underline{X}_{jt} \delta_{jt} \leq \sum_{\substack{\tau \in T \\ \tau \geq t}} x_{jt}^\tau \leq \bar{X}_j \delta_{jt} \quad \forall j \in J, t \in T \quad (3.12)$$

$$\sum_{j \in J} \delta_{jt} \leq \bar{N} \quad \forall t \in T \quad (3.13)$$

$$\sum_{\substack{\tau \in T \\ \tau \leq t(g)}} x_{j\tau}^{t(g)} + z_j^g = D_j^g \quad \forall j \in J, g \in G \quad (3.14)$$

$$0 \leq \sum_{\substack{k \in T \\ k \leq t(g)}} \sum_{\substack{\tau \in T \\ \tau > t(g)}} x_{jk}^\tau \leq S_j \quad \forall j \in J, g \in G \quad (3.15)$$

$$x_{jt}^\tau \geq 0 \quad \forall j \in J, t, \tau \in T : t \leq \tau \quad (3.16)$$

$$\delta_{jt} \in \{0, 1\} \quad \forall j \in J, t \in T \quad (3.17)$$

$$z_j^g \geq 0 \quad \forall j \in J, g \in G \quad (3.18)$$

Es preciso notar que el modelo (3.10)-(3.18) asume que el decisor desea una política de producción única para cada producto en cada período de tiempo considerando todos los escenarios pero sin subordinarse a ninguno de ellos. En cambio, el modelo estocástico con recursión completa permite una mayor flexibilidad en la política de producción, pues ésta adapta la producción de cada producto en cada período a la estructura de los escenarios. En consecuencia, y como ya hemos señalado, el modelo de recursión completa producirá un menor valor en la función objetivo pues la política de producción redundará en una menor cantidad de stock, así como una cantidad de demanda no satisfecha también menor que la obtenida con la política basada en recursión simple. Así mismo, es preciso indicar que la política de recursión simple contempla el costo de inventario y pérdida de demanda al considerar todos los escenarios y, por tanto, esta política también será mejor que la política de producción única por producto y período que resulta del modelo determinista basado en el escenario promedio.

#### 4.- RESULTADOS COMPUTACIONALES

Los modelos para la política de producción propuesta se han implementado en código C, y se ha utilizado las rutinas de librería del CPLEX 7.0 para resolver los modelos de programación entera mixta 0-1, tanto para los modelos deterministas como para el modelo

estocástico con recursión completa. Los experimentos computacionales se han efectuado en un procesador Pentium III a 866 Mhz con 512 Mb de RAM.

La Tabla 4.1 muestra el número de productos **J**, el número de recursos **R**, y el número de períodos de tiempo que constituyen el horizonte temporal **T**, de los casos para el modelo (2.1)-(2.8). Además de las dimensiones: número de restricciones **m**; número de variables 0-1 **n01**; número de variables continuas **nc**; número de elementos distintos de cero en la matriz de restricciones **nel**; y su densidad  $d = \frac{nel}{mxn}$ . Como se puede observar las dimensiones de los casos de prueba son de moderadas a grandes, siendo el caso de mayor dimensión el caso 12, que tiene 4.344 restricciones y 3.600 variables continuas y 1200 variables 0-1.

**Tabla 4.1: Dimensiones de los Casos Para el Modelo Determinista (2.1)-(2.8)**

CASOS	J	R	T	m	n01	nc	nel	d
Caso-1	20	10	10	710	200	600	3.780	0'0066
Caso-2	15	10	15	840	225	675	4.260	0'0056
Caso-3	20	8	12	828	240	720	4.060	0'0051
Caso-4	25	10	10	860	250	750	4.725	0'0055
Caso-5	10	6	12	444	120	360	1.790	0'0084
Caso-6	25	15	12	1.092	300	900	7.175	0'0055
Caso-7	25	15	12	1.092	300	900	7.175	0'0055
Caso-8	20	10	24	1.704	480	1.440	9.100	0'0028
Caso-9	25	15	24	2.184	600	1.800	14.375	0'0027
Caso-10	20	12	36	2.628	720	2.160	15.100	0'0019
Caso-11	25	15	36	3.276	900	2.700	21.575	0'0018
Caso-12	50	30	24	4.344	1.200	3.600	46.750	0'0022

La Tabla 4.2 recoge los resultados de la experimentación computacional obtenidos al resolver el modelo (2.1)-(2.8). El encabezado es el siguiente: **Z<sub>LP</sub>**, valor óptimo de la función objetivo de la relajación lineal del modelo entero mixto; **Iter<sub>LP</sub>**, número de iteraciones necesarias para resolver la relajación lineal y **T<sub>LP</sub>**, tiempo en segundos requerido; **Z<sub>IP</sub>**, valor óptimo del modelo entero mixto; **Iter<sub>IP</sub>**, número de iteraciones adicionales a las obtenidas en la relajación lineal hasta obtener la solución entera; **T<sub>IP</sub>**, tiempo (en segundos) para obtener la solución entera, siendo un tiempo adicional al necesario para resolver la relajación lineal y efectuar el preproceso para reducir las dimensiones del problema; **nn**, número de nodos explorados en la ramificación y acotación empleada para resolver el modelo entero mixto; y **GAP** resultante definido por la expresión:

$$GAP = \frac{Z_{IP} - Z_{LP}}{Z_{LP}} \times 100$$

Señalar que los tiempos de CPU para obtener la solución entera son bastante pequeños a pesar de las dimensiones de los problemas, y sólo existe un caso extremo, el caso 11, que precisó unas cinco horas. También podemos observar en la Tabla 4.2 que en el caso 6 y el caso 10 no se explora ningún nodo, con lo cual las iteraciones son debidas a la aplicaciones de cortes de flujo y cortes fraccionales de Gomory. Se aplicaron 336 del primer tipo y 182 del segundo para el caso 6, y 1480 del primer tipo y 400 del segundo en el caso 10.

**Tabla 4.2: Resultados del Modelo Determinista (2.1)-(2.8)**

CASOS	Z <sub>LP</sub>	Iter <sub>LP</sub>	T <sub>LP</sub>	Z <sub>IP</sub>	Iter <sub>IP</sub>	T <sub>IP</sub>	nn	Gap
Caso-1	14.270.000	484	0'09s	14.298.816'877	4.334	9'86s	837	0'20
Caso-2	17.942.000	592	0'12s	17.961.449'810	507	2'4s	72	0'11
Caso-3	40.639.000	724	0'15s	40.951.269'849	2.389	6'3s	455	0'77
Caso-4	43.658.000	600	0'19s	43.662.816'930	296	1'22s	7	0'011
Caso-5	19.152.000	341	0'02s	19.200.250'318	153	0'5s	12	0'25
Caso-6	44.813.000	598	0'12s	44.816.999'156	249	0'62s	0	0'009
Caso-7	49.098.000	563	0'09s	49.102.322'752	276	0'88s	4	0'009
Caso-8	67.041.000	983	0'21s	67.072.299'283	385	1'17s	2	0'046
Caso-9	76.548.000	1.223	0'34s	76.560.387'673	1.183	8'46s	238	0'016
Caso-10	5.864.247'0824	1.455	0'38s	6.924.010'8034	1.121	1'82s	0	18'07
Caso-11	35.086.000	2.031	0'70s	35.362.729'441	2.221.763	4 h 54 min 25'69 s	481.357	0'79
Caso-12	58.973.000	2.343	0'77s	59.003.087'246	21.503	8 min 48'83s	11.465	0'051

La Tabla 4.3 recoge las dimensiones de los casos considerados para el modelo determinista (2.9)-(2.17). Los 12 primeros casos se corresponden con los casos recogidos en la tabla 4.1. Se puede apreciar el incremento en el número de condiciones y, sobre todo, en el número de variables continuas. Los 20 últimos casos se corresponden con los modelos deterministas construidos con el escenario promedio extraídos de los casos correspondientes al modelo estocástico que se presentan más adelante. Por este motivo, las dimensiones de algunos de ellos son bastante reducidas como son los casos del 13 al 22, mientras que el resto son de moderado tendiendo a grande. Es preciso notar que las dimensiones de los casos para el modelo estocástico son enormes.

**Tabla 4.3: Dimensiones de los Casos Para el Modelo Determinista (2.9)-(2.17)**

<b>CASOS</b>	<b>J</b>	<b>R</b>	<b>T</b>	<b>m</b>	<b>n01</b>	<b>nc</b>	<b>nel</b>	<b>d</b>
<b>Caso-1</b>	20	10	10	890	200	1.300	18.400	0'0138
<b>Caso-2</b>	15	10	15	1.050	225	2.025	32.700	0'0138
<b>Caso-3</b>	20	8	12	1.048	240	1.800	23.840	0'0111
<b>Caso-4</b>	25	10	10	1.085	250	1.625	23.000	0'0113
<b>Caso-5</b>	10	6	12	554	120	900	10.360	0'0183
<b>Caso-6</b>	25	15	12	1.367	300	2.250	43.450	0'0125
<b>Caso-7</b>	25	15	12	1.367	300	2.250	43.450	0'0125
<b>Caso-8</b>	20	10	24	2.164	480	6.480	125.920	0'0084
<b>Caso-9</b>	25	15	24	2.759	600	8.100	194.900	0'0081
<b>Caso-10</b>	20	12	36	3.328	720	14.040	358.080	0'0073
<b>Caso-11</b>	25	15	36	4.151	900	17.550	497.550	0'0065
<b>Caso-12</b>	50	30	24	5.494	1.200	16.200	614.800	0'0064
<b>Caso-13</b>	3	2	4	57	12	42	228	0'0741
<b>Caso-14</b>	15	8	4	261	60	210	2040	0'0289
<b>Caso-15</b>	20	10	4	344	80	280	3120	0'0252
<b>Caso-16</b>	10	6	6	272	60	270	2480	0'0276
<b>Caso-17</b>	10	6	6	272	60	270	2480	0'0276
<b>Caso-18</b>	10	6	6	272	60	270	2480	0'0276
<b>Caso-19</b>	10	6	12	554	120	900	10360	0'0183
<b>Caso-20</b>	10	6	12	554	120	900	10360	0'0183
<b>Caso-21</b>	10	6	12	554	120	900	10360	0'0183
<b>Caso-22</b>	10	6	12	554	120	900	10360	0'0183
<b>Caso-23</b>	25	15	12	1367	300	2250	43450	0'0125
<b>Caso-24</b>	25	15	12	1367	300	2250	43450	0'0125
<b>Caso-25</b>	30	18	12	1638	360	2700	59160	0'0118
<b>Caso-26</b>	30	18	12	1638	360	2700	59160	0'0118
<b>Caso-27</b>	25	16	12	1379	300	2250	45400	0'0129
<b>Caso-28</b>	25	16	12	1379	300	2250	45400	0'0129
<b>Caso-29</b>	30	17	12	1626	360	2700	56820	0'0114
<b>Caso-30</b>	30	17	12	1626	360	2700	56820	0'0114
<b>Caso-31</b>	30	20	12	1662	360	2700	63840	0'0125
<b>Caso-32</b>	30	20	12	1662	360	2700	63840	0'0125

La siguiente Tabla 4.4 muestra los resultados computacionales que se obtienen al resolver los 32 casos que se indican en la Tabla 4.3, bajo el modelo (2.9)-(2.17). Como se puede apreciar al comparar las Tablas 4.2 y 4.4, los resultados obtenidos por el modelo (2.1)-(2.8) son ligeramente mejores que con el modelo (2.9)-(2.17), salvo en los casos 1 y 12. En el

caso 11 se ha producido un incremento significativo de casi cuatro horas más que el tiempo obtenido con el modelo (2.1)-(2.8). Estos resultados inducirían a considerar que a medida que se aumenta las dimensiones de los casos, el modelo (2.1)-(2.8) produce mejores tiempos de ejecución que el modelo (2.9)-(2.17), sin embargo esto no es así, ya que el caso 12 tiene dimensiones similares al caso 11, y en este caso es el modelo (2.9)-(2.17) quien aporta mejor tiempo. Por este motivo, no hay garantía de la superioridad de un modelo sobre el otro.

**Tabla 4.4: Resultados del Modelo Determinista (2.9)-(2.17)**

CASOS	Z <sub>LP</sub>	Iter <sub>LP</sub>	T <sub>LP</sub>	Z <sub>IP</sub>	Iter <sub>IP</sub>	T <sub>IP</sub>	nn	Gap
Caso-1	14.276.000	489	0'14s	14.298.816'877	2680	7'95s	251	0'16
Caso-2	17.945.000	579	0'23s	17.961.449'810	965	6'27s	72	0'092
Caso-3	40.786.000	697	0'35s	40.951.269'849	3989	15'26s	497	0'40
Caso-4	43.659.000	534	0'22s	43.662.816'930	448	3'07s	16	0'009
Caso-5	19.158.000	298	0'03s	19.200.250'318	191	0'73s	7	0'22
Caso-6	44.813.000	539	0'20s	44.816.999'156	240	0'72s	0	0'009
Caso-7	49.099.000	562	0'20s	49.102.322'752	565	1'89s	17	0'007
Caso-8	67.041.000	991	0'28s	67.072.299'283	400	2'64s	1	0'046
Caso-9	76.549.000	1.198	0'42s	76.560.387'673	2.837	27'21s	271	0'015
Caso-10	5.883.990'1201	1.423	0'35s	6.924.010'7938	1.032	5'85s	0	17'67
Caso-11	35.207.000	2.360	1'63s	35.362.729'439	2.415.379	8 h 51 min 41'97 s	233.774	0'44
Caso-12	58.976.000	2.588	1'50s	59.003.087'246	1.394	18'91s	19	0'046
Caso-13	111.914'7581	28	0'24s	115.601'43199	108	0'48s	7	3'29
Caso-14	385.249'7771	100	0'00s	980.017'36933	202	0'41s	3	154'38
Caso-15	416.876'1771	122	0'01s	979.913'29046	89	0'25s	0	135'06
Caso-16	358.120'9222	101	0'01s	776.022'4916	91	0'22s	0	116'69
Caso-17	297.492'0019	103	0'01s	722.257'55313	120	0'2s	0	142'78
Caso-18	6.476.671'9534	52	0'00s	6.476.671'9534	0	0'02s	0	0
Caso-19	19.784.000	258	0'04s	19.828.597'329	155	0'59s	3	0'22
Caso-20	11.917.000	226	0'02s	12.235.752'567	172	0'71s	1	2'67
Caso-21	12.031.000	224	0'01s	13.136.140'001	189	0'39s	0	9'18
Caso-22	12.214.000	221	0'03s	16.529.007'994	290	0'36s	0	35'33
Caso-23	2.044.149'7858	551	0'09s	2.846.668'7942	423	2'62s	2	39'26
Caso-24	2.044.158'8367	551	0'14s	2.845.832'1397	425	0'96s	0	39'22
Caso-25	2.848.901'4946	661	0'20s	3.341.229'4277	409	0'97s	0	17'28
Caso-26	2.848.893'4432	661	0'15s	3.342.304'9795	406	1'37s	0	17'32
Caso-27	1.562.790'4757	551	0'30s	3.110.748'9284	434	1'42s	0	99'05
Caso-28	1.563.244'0343	551	0'13s	3.114.511'3784	417	2'00s	2	99'23
Caso-29	153.263.077'82	1901	0'37s	153.263.077'82	0	0'15s	0	0

<b>Caso-30</b>	24.774.000	718	0'36s	24.778.552'948	323	1'36s	2	0'018
<b>Caso-31</b>	48.776.000	683	0'25s	48.780.808'229	273	0'81s	0	0'009
<b>Caso-32</b>	9.812.463'5566	723	0'20s	10.001.878'087	4.123	25'22s	268	1'93

Es preciso notar que cuando el GAP es nulo para  $Z_{LP} = Z_{IP}$ , esto es, los valores óptimos para la relajación lineal y para el problema entero mixto coinciden, hecho que se puede observar en los casos 18 y 29, de la Tabla 4.4. Y a medida que el GAP aumenta la diferencia entre ambos valores también es mayor. Otra característica a observar es que a partir del caso 15 hasta el 31 son muchos los ejemplos donde no se tiene que explorar ningún nodo y la solución entera se consigue mediante la adición de hiperplanos de corte. Estos casos se corresponden con modelos construidos con el escenario promedio.

La Tabla 4.5 recoge las dimensiones correspondientes a los casos considerados para analizar el modelo estocástico bajo recursión completa (3.1)-(3.9). Además de la misma información que las Tablas 4.1 y 4.3, la Tabla 4.5 muestra dos columnas adicionales que recogen el número de escenarios considerados **S**, y el número de grupos de escenarios o de forma equivalente el número de nodos en el árbol de decisión **G**. Se puede observar que las dimensiones de los casos crecen significativamente a medida que aumenta el número de escenarios, llegando a casos con  $m \approx 75.000$  condiciones,  $n_{01} \approx 16.000$  variables 0-1 y  $n_c \approx 94.000$  variables continuas. Nota: Tal y como se ha indicado anteriormente, en esta experiencia computacional se ha considerado que cada período de tiempo es una etapa.

**Tabla 4. 5: Dimensiones de los Casos Para el Modelo Estocástico con Recursión Completa (3.1)-(3.9)**

<b>CASOS</b>	<b>J</b>	<b>R</b>	<b>T</b>	<b>S</b>	<b>G</b>	<b>m</b>	<b>n01</b>	<b>nc</b>	<b>nel</b>	<b>d</b>
<b>Caso-13</b>	3	2	4	10	20	270	60	165	954	0'0157
<b>Caso-14</b>	15	8	4	10	20	1.230	300	825	7.920	0'0057
<b>Caso-15</b>	20	10	4	10	20	1.620	400	1.100	11.960	0'0049
<b>Caso-16</b>	10	6	6	18	64	2.828	640	2.170	20.920	0'0026
<b>Caso-17</b>	10	6	6	24	69	3.003	690	2.170	20.860	0'0024
<b>Caso-18</b>	10	6	6	18	91	4.097	910	3.670	34.780	0'0018
<b>Caso-19</b>	10	6	12	10	111	5.117	1.110	7.830	93.520	0'0020
<b>Caso-20</b>	10	6	12	10	111	5.117	1.110	7.830	93.520	0'0020
<b>Caso-21</b>	10	6	12	10	111	5.117	1.110	7.830	93.520	0'0020
<b>Caso-22</b>	10	6	12	10	111	5.117	1.110	7.830	93.520	0'0020
<b>Caso-23</b>	25	15	12	36	316	35.756	7.900	46.975	956.125	0'0005
<b>Caso-24</b>	25	15	12	36	316	35.756	7.900	46.975	956.125	0'0005
<b>Caso-25</b>	30	18	12	36	309	41.871	9.270	54.210	1.241.040	0'0005
<b>Caso-26</b>	30	18	12	36	309	41.871	9.270	54.210	1.241.040	0'0005

<b>Caso-27</b>	25	16	12	48	421	48.057	10.525	62.525	1.325.000	0'0004
<b>Caso-28</b>	25	16	12	48	421	48.057	10.525	62.525	1.325.000	0'0004
<b>Caso-29</b>	30	17	12	60	526	70.788	15.780	93.690	2.063.670	0'0003
<b>Caso-30</b>	30	17	12	60	526	70.788	15.780	93.690	2.063.670	0'0003
<b>Caso-31</b>	30	20	12	50	466	64.206	13.980	86.490	2.113.800	0'0003
<b>Caso-32</b>	30	20	12	64	541	74.361	16.230	93.750	2.304.720	0'0003

La Tabla 4.6 presenta los resultados de la experimentación computacional correspondientes a los 20 casos utilizados con el modelo estocástico con política de recursión completa (3.1)-(3.9). Igual que en las otras tablas de resultados, los tiempos de la relajación lineal vienen dados en segundos, mientras que se especifican las unidades para los tiempos del modelo entero mixto. En los casos señalados con uno y dos asteriscos, esto es, los casos 19, 27, 30 y 32 no se ha podido obtener el valor óptimo del modelo debido bien a un desbordamiento de la memoria requerida, bien a alcanzar el tiempo límite prefijado (36 horas). Para estos casos, el epígrafe  $Z_{IP}$  muestra el valor de la función objetivo para la mejor solución entera obtenida hasta el momento, denominada solución incumbente. El tiempo necesario para resolver los otros casos es bastante adecuado considerando las dimensiones que tienen los casos tratados. Nótese también que el GAP de los problemas es bastante grande salvo algunas excepciones como el caso 31, y el 18, que es muy pequeño, ó el 29 donde es nulo.

**Tabla 4. 6: Resultados del Modelo Estocástico bajo Recursión Completa (3.1)-(3.9)**

CASOS	$Z_{LP}$	Iter <sub>LP</sub>	T <sub>LP</sub>	$Z_{IP}$	Iter <sub>IP</sub>	T <sub>IP</sub>	nn	Gap
<b>Caso-13</b>	112.327'2924	163	0'24s	116.252'05417	370	0'73s	13	3'49
<b>Caso-14</b>	485.656'3223	553	0'29s	1.036.260'7259	2.810	9'77s	54	113'37
<b>Caso-15</b>	416.742'4385	601	0'09s	1.022.723'0004	2.025	3'25s	4	145'41
<b>Caso-16</b>	358.049'6759	1.108	0'34s	812.677'8404	3.670	18'7s	81	126'97
<b>Caso-17</b>	302.955'0147	1.241	0'20s	770.145'11187	99.818	5 min 42'85s	7.102	154'21
<b>Caso-18</b>	6.496.665'9778	902	0'08s	6.496.669'1572	9	0'16s	0	0'00005
<b>Caso-19</b> *	19.797.000	2.935	1'20s	19.838.887'124	15.563.441	31 h 52 min 23'26s	1.482.149	0'21
<b>Caso-20</b>	11.883.000	2.194	0'63s	12.138.301'077	7.560	3 min 49'8s	1.398	2'15
<b>Caso-21</b>	12.077.000	2.182	0'54s	13.141.950'0346	2.272	20'32s	96	8'82
<b>Caso-22</b>	12.209.000	2.120	0'26s	16.511.888'056	2.584	5'19s	0	35'24
<b>Caso-23</b>	2.044.129'1983	14.911	4'83s	2.881.612'5383	19.068	26 min 19'65s	341	40'97
<b>Caso-24</b>	2.052.237'5371	14.904	5'55s	2.888.499'2461	32.534	35 min 58'66s	1.262	40'75

<b>Caso-25</b>	2.848.894'2178	17.466	8'03s	3.364.995'4389	17.227	14 min 33'58s	156	18'11
<b>Caso-26</b>	2.862.173'2201	17.487	8'65s	3.378.245'99	25.131	39 min 16'86s	416	18'03
<b>Caso-27</b> **	1.562.685'292	19.873	8'40s	3.138.608'9859	2.402.050	> 36 h	198.400	100'85
<b>Caso-28</b>	1.569.801'3949	19.858	10'35s	3.146.887'2972	1.992.720	44 h 4 min 0'77s	234.347	100'46
<b>Caso-29</b>	153.350.226'20	124.432	62'99s	153.350.226'20	0	3'02s	0	0
<b>Caso-30</b> *	24.774.000	34.103	21'76s	24.780.804'385	680.297	5 h 55 min 53'99s	15.161	0'03
<b>Caso-31</b>	48.776.000	29.561	21'32s	48.780.950'931	10.661	37'98s	0	0'01
<b>Caso-32</b> **	9.823.314'506	36.644	32'69s	10.094.000	1.582.455	> 36 h	17.200	2'755

\* = Desbordamiento de memoria.

\*\* = Tiempo límite (36 horas) superado.

Se ha realizado una comparación mediante una serie de medidas sobre de la bondad de la solución del modelo estocástico frente a la solución del modelo determinista construido con el escenario promedio. Ver la Tabla 4.7. Dichas medidas que se definen a continuación, se explican con más detalle en Birge y Louveaux (1997).

1.-  $Z_{IP}$ , valor óptimo del modelo estocástico bajo recursión completa.

2.-  $EEV1$ , definido por

$$EEV1 = \sum_{s \in \Omega} w^s Z_{IP}^s$$

donde  $Z_{IP}^s$  es el valor óptimo del modelo determinista mixto 0-1 (2.9)-(2.17), bajo el escenario  $s$ , pero en el que la solución se ha fijado a la solución óptima del modelo (2.9)-(2.17),  $x_{jt}^r, \delta_{jt}, z_{jt}$ , construido con el escenario promedio, y  $w^s = w^g$  para  $g \in G_{|T|}$  son las ponderaciones sobre los grupos de escenarios de la última etapa que están formados por escenarios individuales.

3.-  $EEV2$ , valor óptimo del modelo estocástico mixto 0-1 (3.1)-(3.9), pero cuando la solución tiene fijas las variables de la primera etapa a los valores correspondientes a la solución óptima del problema determinista mixto 0-1 (2.9)-(2.17), construido con el escenario promedio.

4.- **EEV3**, valor óptimo del modelo estocástico mixto 0-1, (3.1)-(3.9), pero cuando se han ido fijando las variables de la primera etapa a los valores correspondientes de la solución óptima del problema determinista bajo el escenario promedio, las variables de la segunda etapa a los valores de las soluciones correspondientes a los submodelos deterministas construidos con los escenarios promedios, pero de los escenarios que parten de cada nodo de la segunda etapa y mantienen fijas sus variables de la primera etapa, y así sucesivamente hasta alcanzar la última etapa, en la que se dejan libres o sin fijar las variables de dicha etapa.

5.- **VSS**, valor de la solución estocástica que viene expresado por

$$VSS = EEV2 - Z_{IP}$$

e indica la ganancia de resolver el modelo estocástico o pérdida por no considerar las variaciones aleatorias.

**Tabla 4. 7: Medidas de la Bondad de la Solución Estocástica**

CASOS	$Z_{IP}$	EEV1	EEV2	EEV3	VSS
<b>Caso-13</b>	112.327'2924	Infinito S=10 100% de escenarios infactibles	116.252'05404	Infinito	3924'76164
<b>Caso-14</b>	485.656'3223	Infinito S=10 100% de escenarios infactibles	Infinito	Infinito	Infinito
<b>Caso-15</b>	416.742'4385	Infinito S=10 100% de escenarios infactibles	Infinito	Infinito	Infinito
<b>Caso-16</b>	358.049'6759	Infinito S=18 100% de escenarios infactibles	Infinito	Infinito	Infinito
<b>Caso-17</b>	302.955'0147	Infinito S=24 100% de escenarios infactibles	Infinito	Infinito	Infinito
<b>Caso-18</b>	6.496.665'0147	Infinito S=18 83'333% de escenarios infactibles	6.496.669'1534	6.901.461'1679	4'1387
<b>Caso-19</b> *	19.797.000	Infinito S=10 100% de escenarios infactibles	19.842.000	Infinito	45000
<b>Caso-20</b>	11.883.000	Infinito S=10 100% de escenarios infactibles	Infinito	Infinito	Infinito
<b>Caso-21</b>	12.077.000	Infinito S=10	Infinito	Infinito	Infinito

		100% de escenarios infactibles			
<b>Caso-22</b>	12.209.000	Infinito S=10 100% de escenarios infactibles	Infinito	Infinito	Infinito
<b>Caso-23</b>	2.044.129'1983	Infinito S=36 100% de escenarios infactibles	Infinito	Infinito	Infinito
<b>Caso-24</b>	2.052.237'5371	Infinito S=36 100% de escenarios infactibles	Infinito	Infinito	Infinito
<b>Caso-25</b>	2.848.894'2178	Infinito S=36 100% de escenarios infactibles	Infinito	Infinito	Infinito
<b>Caso-26</b>	2.862.173'2201	Infinito S=36 100% de escenarios infactibles	Infinito	Infinito	Infinito
<b>Caso-27</b>	3.138.608'9859	Infinito S=48 100% de escenarios infactibles	Infinito	Infinito	Infinito
<b>Caso-28</b>	1.569.801'3949	Infinito S=48 100% de escenarios infactibles	Infinito	Infinito	Infinito
<b>Caso-29</b>	153.350.226'20	Infinito S=60 3'333% de escenarios infactibles	Infinito	Infinito	Infinito
<b>Caso-30</b>	24.774.000	Infinito S=60 100% de escenarios infactibles	Infinito	Infinito	Infinito
<b>Caso-31</b>	48.776.000	Infinito S=50 100% de escenarios infactibles	Infinito	Infinito	Infinito
<b>Caso-32</b>	10.094.000	Infinito S=64 100% de escenarios infactibles	Infinito	Infinito	Infinito

En la Tabla 4.7, la columna del epígrafe EEV1 muestra dicho valor, además del número de escenarios S del caso correspondiente y el porcentaje de subproblemas bajo los distintos escenarios que han dado infactible. Como se puede observar el valor de EEV1 es infinito para todos los casos. La solución óptima del modelo determinista bajo el escenario promedio no es factible en el 100% de los escenarios, a excepción de los casos 18 cuyo porcentaje de

problemas infactibles bajo los escenarios es del 83'333% y en menor grado el caso 29 que sólo tiene un porcentaje del 3'333% de subproblemas infactibles bajo los distintos escenarios. Las infactibilidades de los distintos subproblemas bajo cada escenario en cada caso que hacen que el valor esperado sea infinito se deben sobre todo a que la restricción sobre la demanda de algún producto se ve superada, o a que se supere la disponibilidad de un recurso, atendiendo a lo indicado a producir según la solución del escenario promedio. Ocurre parecido con la columna correspondiente al EEV2, que en casi todos los casos resulta infinito, a excepción de los caso 13, 18 y 19. Este último caso marcado en la Tabla 4.7 con un asterisco, tiene solución, aunque se produjo un error de desbordamiento de memoria antes de alcanzarla, y se muestra el mejor valor entero obtenido.

Debido a que en la experimentación para obtener el parámetro EEV3 se fijan las variables de cada etapa a las correspondientes soluciones de los submodelos construidos con los respectivos escenarios promedio de las ramas del árbol que parten de los nodos de las correspondientes etapas, el modelo resultante es más restrictivo que el del EEV2. Por esto, el parámetro EEV3 sólo se ha calculado para los casos en los que el EEV2 es finito, ya que en el resto igual que el EEV2 resulta infinito. Sólo el caso 18 muestra un valor del EEV3 distinto de infinito, y que vale 6.901.461'1679. Dicho valor como se puede observar es mayor que el valor óptimo, 6.496.665'0147, obtenido por el modelo estocástico para el mismo caso. En cuanto a los casos 13 y 19 se refiere, al fijar las variables de la primera etapa se encuentra solución, sin embargo, al tratar de resolver los submodelos promedios de los nodos de la segunda etapa, la solución es infactible y, por tanto, el valor esperado se considera infinito.

Para finalizar se analiza la columna VSS de la Tabla 4.7. Se puede observar que en la mayoría de los casos su valor es lógicamente infinito. Ello no significa que sea un resultado inadecuado, sino al contrario, mientras el modelo estocástico proporciona en dichos casos una solución adaptada a las variaciones que se producen con los parámetros aleatorios, el modelo determinista proporciona una solución infactible para casi todos los escenarios. Sólo en tres casos se obtiene un valor distinto de infinito, pero se puede observar que dicho valor es siempre positivo. A excepción del caso 18 donde su valor es 4'1387, en los otros dos casos su valor es bastante grande. Ello significa que la solución aportada por el modelo estocástico es mucho mejor que la que ofrece el modelo determinista construido con el escenario promedio. Como conclusión de los resultados obtenidos no cabe duda que el modelo determinista equivalente o modelo estocástico bajo recursión completa es más adecuado que el modelo determinista basado en el escenario promedio.

## 5.- CONCLUSIONES

En este trabajo se han presentado dos modelos deterministas alternativos que recogen una política táctica para la Planificación de la Producción a lo largo de un horizonte temporal prefijado. Se ha realizado un análisis comparativo entre ambos modelos. Es preciso hacer hincapié en que los resultados computacionales no indican que el modelo determinista (2.9)-(2.17) sea más eficiente que el modelo (2.1)-(2.8), como hasta ahora generalmente se venía

considerando, pero tampoco se puede concluir que sea menos eficiente. Ahora bien, el interés principal de este trabajo se centra en la incertidumbre que rodea a esta clase de problemas para cuyo tratamiento se ha empleado la disciplina de Análisis de Escenarios, y se ha propuesto un Modelo Determinista Equivalente Mixto 0-1, en base a un árbol de escenarios multietápico. Se presenta la versión Compacta del modelo en sus dos variantes bajo Recursión Completa, donde no se anticipan las decisiones, sino que se ajustan a la nueva información con el paso del tiempo y bajo Recursión Simple, en la que se toman todas las decisiones desde un principio y no se da opción a posibles variaciones. La experiencia computacional se ha obtenido sobre el modelo estocástico bajo recursión completa, y como se puede observar en los casos de tamaño pequeño y moderado, los tiempos de ejecución resultantes son bastante adecuados. El problema surge en aquellos casos de grandes dimensiones. Por este motivo, actualmente hemos empezado a trabajar con métodos de descomposición, tales como Descomposición Lagrangiana Aumentada o el método de Ramificación y Fijación Coordinado (Branch and Fix Coordination, BFC), ver Alonso-Ayuso et al. (2003). Por último, se presentan una serie de medidas de la bondad del modelo Multietápico con Recursión Completa, y como se puede observar en la experiencia computacional presentada, dicho modelo produce mejores resultados que el modelo tradicional basado en el escenario promedio. Otra dirección a la que apunta este trabajo es la función objetivo elegida. En los modelos propuestos en el trabajo, se minimiza el valor esperado de la función objetivo, pero puede ser que su varianza sea muy grande. En este sentido, y con vistas a un próximo trabajo, nuestro interés se centrará en minimizar la función integrada por el valor esperado junto con la probabilidad de exceso de un coste total dado.

## 6.- AGRADECIMIENTOS

Este trabajo ha sido subvencionado por el Ministerio de Ciencia y Tecnología, a través del proyecto TIC2000-1750-C06-03/04/05 y la Comunidad Autónoma de Madrid, a través del proyecto 071/005/2001.

## BIBLIOGRAFÍA

- S. Ahmed, A. J. King y G. Parija (2001). *A multi-stage stochastic integer programming approach for capacity expansion under uncertainty*. Stochastic Programming e-Print Series.
- M. Albritton, A. Shapiro y M. Spearman (2000). *Finite Capacity Production Planning with Random Demand and Limited Information*. Stochastic Programming e-Print Series.
- A. Alonso-Ayuso, L.F. Escudero y M.T. Ortuño (2003). *BFC, A Branch-and-Fix Coordination algorithmic framework for solving some types of stochastic pure and mixed 0-1 programs*. European Journal of Operational Research, en prensa.

- P. Baricelli, C.Lucas y G. Mitra (1996). *A Model for Strategic Planning under Uncertainty*. Top, 4:361-384.
- J.R. Birge y F. Louveaux (1997). *Introduction to Stochastic Programming*. Springer Series in Operations Research.
- G.R. Bitran y D. Tirupati (1993). *Hierarchical Production Planning*, in: S.C Graves, A.H.G. Rinnooy-Kan and P.H. Zipkin (eds). *Logistic of Production and Inventory*, North-Holland, 523-568.
- G.R. Bitran y H.H. Yanasse (1984). *Deterministic Approximation to Stochastic Production Problems*. Operations Research, 32:999-1018.
- B.P. Dzielinski y R.E Gomory (1965). *Optimal Programming of Lot Sizes, Inventory and Lot Size Allocations*. Management Sciences, 11:874-890.
- G.D. Eppen, R.K. Martin y L. Schrage (1989). *A Scenario Approach to Capacity Planning*. Operations Research, 37:517-527.
- L.F. Escudero, P.V. Kamesam, A. King y R.J.-B Wets (1993). *Production Planning via escenario modelling*. Annals of Operations Research, 43:311-335.
- L.F. Escudero, E. Galindo, E. Gómez, G. García y V. Sabau (1999). *SCHUMANN, a modelling framework for supply chain management under uncertainty*. European Journal of Operational Research, 119:13-34.
- M. Florian y M. Klein (1971). *Deterministic Production Planning With Concave Costs and Capacity Constraints*. Management Sciences, 18:12-20.
- S.C. Graves (1986). *A Tactical Planning Model for a Job Shop*. Operations Research, 34:522-533.
- S.C. Graves y C.H. Fine (1988). *A Tactical Planning Model for Manufacturing Subcomponents of mainframe computers*. Journal of Manufacturing and Operations Management, 2:4-34.
- U.S. Karmakar (1987). *Lot Sizes, Lead Times and in Process Inventories*. Management Sciences, 33:409-423.
- U.S. Karmakar (1989). *Capacity Loading and Release Planning With Work in Progress and Lead Times*. Journal of Manufacturing and Operations Management, 2:105-123.
- S. Kekre y S. Kekre (1985). *Work in Process Considerations in Job Shop Capacity Planning*. Working Paper GSIA, Carnegie Mellon University, Pittsburgh, Penn, USA.

J. Krarup y O. Bilde (1977). *Plant location, set covering and economic lot size: An  $O(mn)$  algorithm for structured problems*. In: Collatz et al. editors, *Optimierung bei Graphentheoretischen und gauzzahligen Problemen*. Birkhauser-Verlag, 155-180.

L.S. Lasdon y R.C. Terjung (1971). *An Efficient Algorithm for Multi-Echelon Scheduling*. *Operations Research*, 19:946-969.

C. A. Lucas, S.A. MirHassani, G. Mitra y C.A. Poojari (2000). *Computational solution of a capacity planning model under uncertainty*. *Parallel Computing Journal*, 26:511-538.

C.A. Lucas, S.A. MirHassani, G. Mitra y C.A. Poojari (2001). *An application of Lagrangian relaxation to a capacity planning problem under uncertainty*. *Journal of Operational Research Society*, 52:1256-1266.

R.T. Rockafellar y R.J-B. Wets (1991) . *Scenario and policy aggregation in optimization under uncertainty*. *Mathematics of Operations Research*, 16:119-147.

J.F. Shapiro (1993). *Mathematical programming models and methods for production planning and scheduling*. In S.G. Graves, A.H.G. Rinnooy Kan y E. Zipkin editors, *Logistics of Production and Inventory*. North-Holland, 371-443.

J.F. Shapiro (2001). *Modeling The Supply Chain*. Duxbury Press. Pacific Grove, CA.

S.P. Sethi y Q. Zhang (1995). *Multilevel Hierarchical Decision Making in Stochastic Marketing-Production Systems*. *SIAM Journal on Control and Optimization*, 33:528-553.

H.M. Wagner y T.M. Within (1958). *A dynamic version of the economic lot size model*. *Management Science*, 5:89-96.

P.H. Zipkin (1986). *Models for Design and Control of Stochastic Multi-item Batch Production Systems*. *Operations Research*, 34:91-104.